

# Optiska system

*Per-Erik Danielsson (och något Maria Magnusson)*

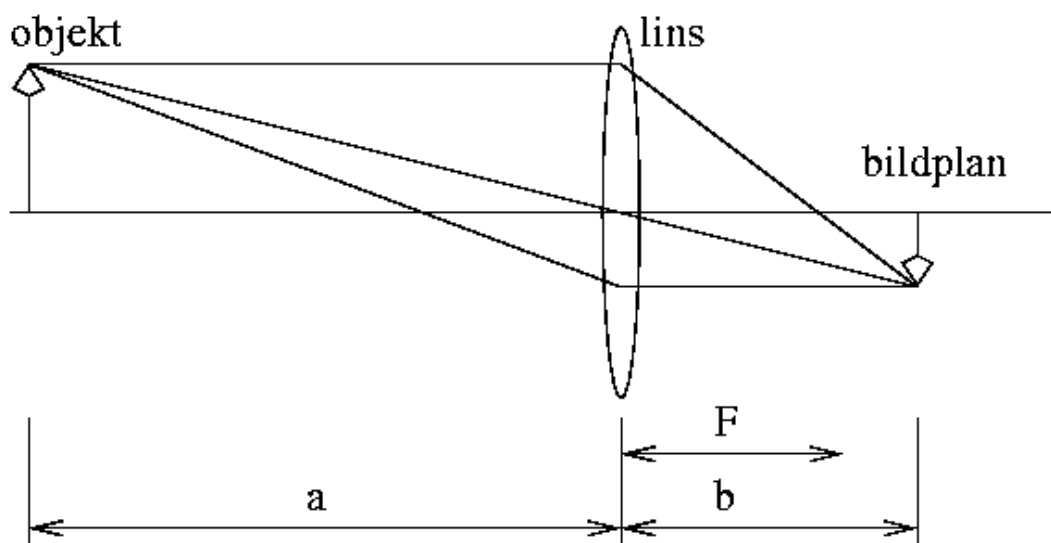
Detta avsnitt innehåller material av blandad karaktär. Vi börjar med att studera avbildningsegenskaperna hos en vanlig lins. I nästa sektion visar vi hur kunskapen om dessa kan utnyttjas för att korrigera intensiteten i en bild, sk shadingkorrektion. Därefter behandlas konfokala mikroskop, som är intressanta pga av möjligheten att registrera riktiga 3D-volymer. Slutligen härlededer vi punktspridningsfunktionen och upplösningen för ett optiskt system.

## 1 Avbildningsegenskaper hos en enkel lins

I det enklaste fallet har ett linssystem eller en kamera en cirkulär apertur (öppning) med diametern  $D$ . En lins bryter samman alla strålar från en punktkälla till en enda punkt i bildplanet. Om linsen är tunn, räknar man med att linsen endast gör detta, dvs den ger inte upphov till några distorsioner. Linslagen är illustrerad i Fig. 1. Den säger att om bildplanet ligger på avståndet  $b$  från linsen så hamnar ett objekt i världen på avståndet  $a$  från linsen i bästa möjliga skärpa på bildplanet. Det gäller att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}, \quad (1)$$

Fokalavståndet  $F$  är en egenskap hos linsen. Notera att för en punktkälla på långt avstånd från linsen gäller att  $b \approx F$ . Om ett objekt i världen ligger på ett avstånd från linsen som är skilt från  $a$  så blir detta objekt mer eller mindre oskarpt på bildplanet. Hur oskarpt det blir beror på linssystemets skärpedjup som definieras nedan.



*Fig. 1 Linslagen illustrerad.*

Linsens diameter  $D$  och fokalavståndet  $F$  bestämmer både **skärpa** (upplösning) och **skärpedjup**. Diametern  $d$  i strålkonens spets i fokalplanet är inte oändligt liten utan bestäms av diffraktionseffekter till ungefär

$$d \approx 1.22 \cdot \lambda \cdot \frac{F}{D}. \quad (2)$$

$\frac{F}{D}$  kallas ibland  $F$ -talet eller nominellt fokalförhållande.

Vi definierar här

$$\textbf{Upplösningen} = \frac{1}{d} \approx \frac{1}{1.22} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{D}{F} \quad (3)$$

För grönt ljus ( $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ ) och ett  $F$ -tal  $F/D = 1$  är det alltså meningsfullt att upplösa punkter ned till ungefär tätheten  $0,5 \mu\text{m}$ . Sådan hög upplösning strävar man normalt efter endast i mikroskop.

För **skärpedjupet**  $s$ , gäller

$$s = \frac{2\epsilon a(a - F)}{DF} \quad (4)$$

där  $a$  är avståndet mellan objekt och lins och  $s$  är det intervall som objektet kan förflyttas inom utan att suddas ut mer än  $\epsilon$ .

En egenskap som inte direkt är kopplad till upplösningen gäller **totala antalet upplösbara bildpunkter** i bildfältet. De flesta linser och linssystem är utan vidare kapabla att upplösa  $512 \times 512$  bildpunkter, vilket kommit att bli något av en standard för digitala bilder. I vissa sammanhang (högupplösande bildskanners) strävar man emellertid efter att upplösa 10 000-tals bildpunkter tvärs bildfältet. Härvid spelar själva linsens kvalitet och dess aperturdiameter  $D$  en avgörande roll på så sätt att stor diameter  $D$  krävs för att inte linsen ska behöva vara extremt vidvinklig. Fokalavståndet  $F$  inverkar i princip inte på antalet upplösta bildpunkter.

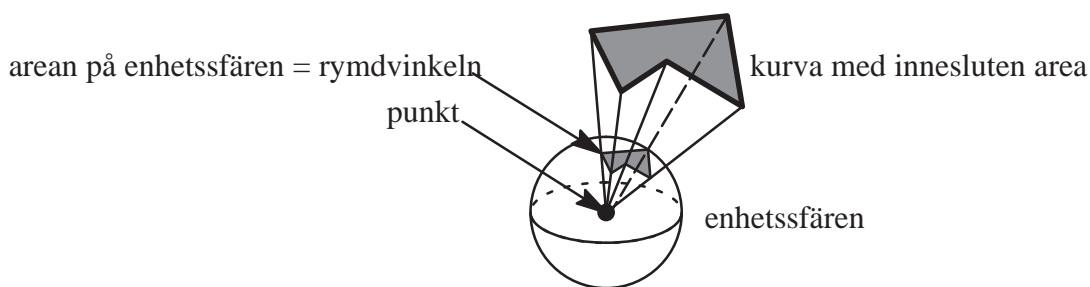


Fig. 2 Illustration av rymdvinkeln.

I det följande behövs begreppet rymdvinkel. En **rymdvinkel** är en del av rummet begränsad av linjesegment som utgår från en speciell punkt i rummet till alla punkter på en sluten kurva, se Fig. 2. Rymdvinkeln representerar den synliga vinkeln under vilken alla punkter innanför och på den slutna kurvan kan ses från den speciella punkten. Som mätvärde på rymdvinkeln tas arean som skärs bort av linjesegmenten på en enhetssfär centrerad runt punkten. Den maximala rymdvinkeln, för en hel sfär, blir därmed

$$\text{rymdvinkeln} = \frac{A}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \quad (5)$$

där  $A$  betecknar sfärens area och  $r$  betecknar sfärens radie.

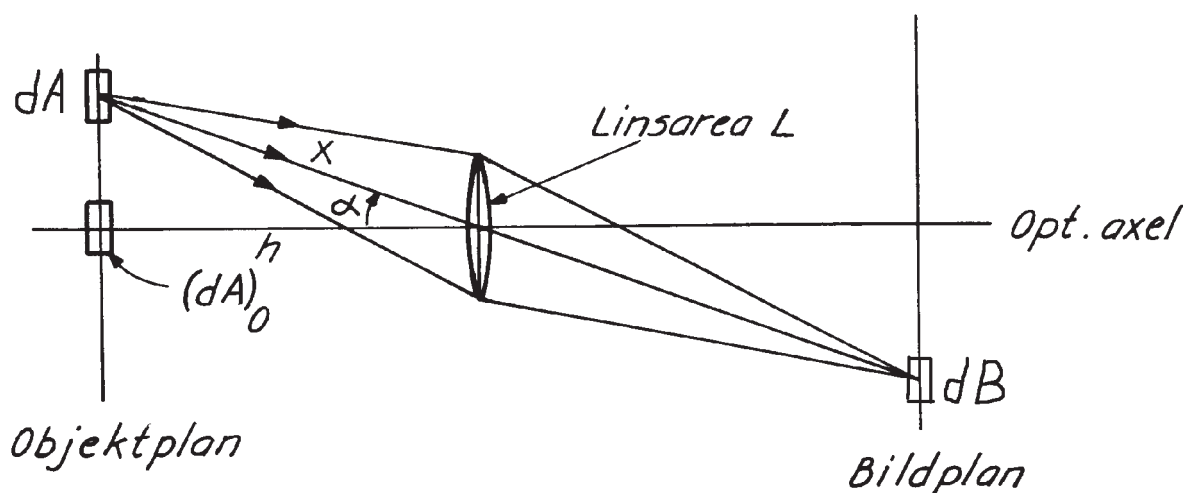


Fig. 3 Geometri för beräkning av vinjettering.

En vanlig lins ger **olika ljusstyrka** över bildytan - fokalplanet enligt den så kallade **cos<sup>4</sup>-lagen**. Vi ska nu härleda denna lag, se Fig. 3 Det förekommer en hel del missuppfattningar om härledningen av cos<sup>4</sup>-lagen i litteraturen. Det är följaktligen lätt att tänka fel. Anta därför, för enkelhets skull, att objektplanet är en diffust reflekterande yta. En sådan reflekterar lika mycket ljus åt alla håll. Antag också att objektplanet ligger i fokus, dvs att det avbildas med perfekt skärpa på bildplanet. Ett ytelement  $dA$  i objektplanet mappas genom linsen på ett ytelement  $dB$  i bildplanet.

Ett ytelement  $dA$  i objektplanet är placerad på avståndet

$$x = h / \cos \alpha . \quad (6)$$

Linsens apertur (apertur = ”glugg mot” eller ”yta vänd mot”) mot ytelementet är

$$L \cdot \cos \alpha . \quad (7)$$

Ytelementet bestrålar därmed linsen med rymdvinkeln

$$\frac{L \cos \alpha}{x^2} = \frac{L \cos^3 \alpha}{h^2} . \quad (8)$$

Vidare har ett ytelement i bildplanet med arean  $dB$ , ytan

$$dB \cdot \cos \alpha \quad (9)$$

vänd mot linsen. Avståndet mellan lins och bildelement påverkar inte ljusstyrkan, eftersom linsen bryter ihop ljuset mot bildplanet. Ekvation (8) kombinerat med (9) ger till slut att ljusstyrkan blir proportionell mot

$$\frac{L \cdot dB}{h^2} \cdot \cos^4 \alpha . \quad (10)$$

Grafiskt illustreras  $\cos^4$ -lagen av Fig. 4. En lins som används vidvinkligt får som synes stark dämpning, så kallad **vinjettering** i bildytans kantområden.

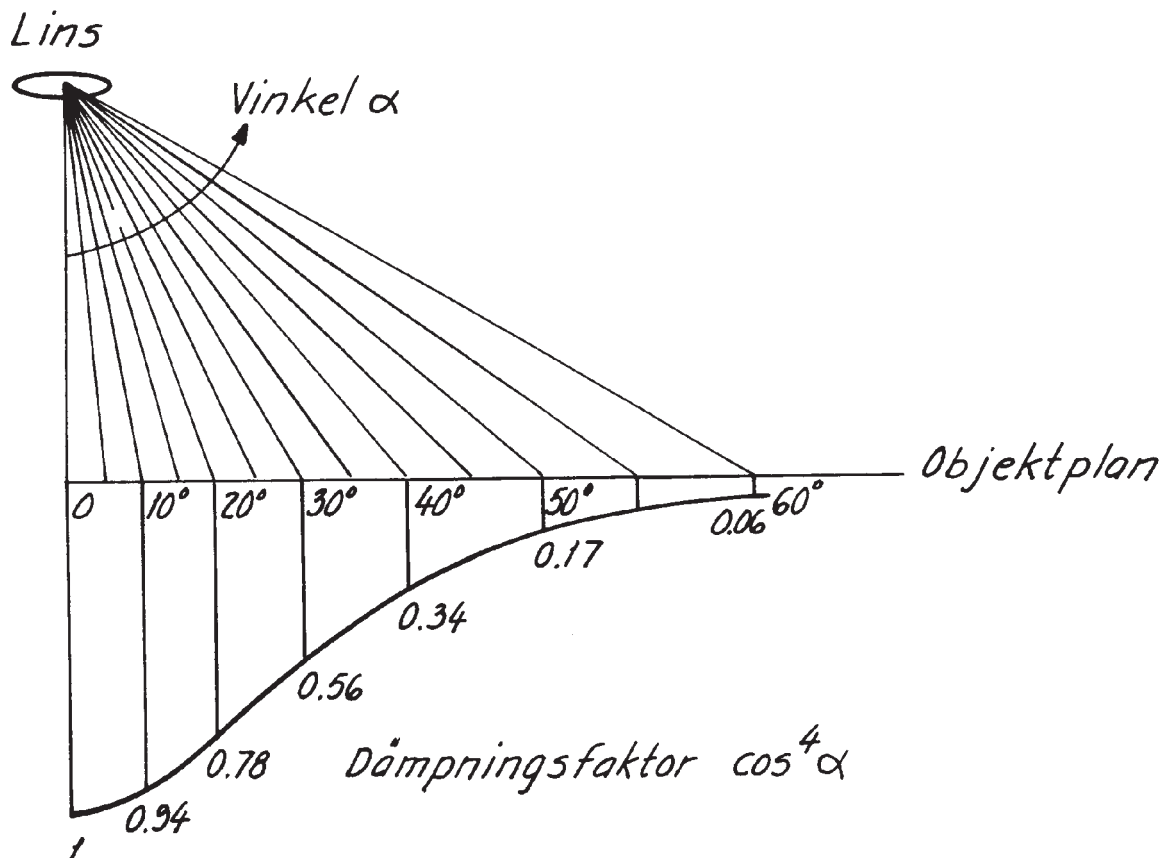


Fig. 4 Vinjetteringseffekten hos en lins.

## 2 Shading-korrektion

$f(x, y) = s_{xy}^{-1}[b(x, y)]$ . I praktiken brukar man emellertid reducera sökandet efter  $s_{xy}$  till att kalibrera några, minst två, punkter på  $f$ -axeln. Ur dessa mätresultat deduceras två koefficienter  $c_1$  och  $c_2$  på sätt som strax skall beskrivas. Det digitala korrigerade värdet  $\hat{f}(x, y)$  ska sedan beräknas ur ett uppfångat  $b(x, y)$  med det linjära sambandet

$$\hat{f}(x, y) = c_1 [b(x, y) + c_2] \approx f(x, y) \quad (11)$$

där  $c_1$  är en multiplikativ och  $c_2$  en additiv korrektionsfaktor. Detta är den första förenklingen.

Den andra praktiska förenklingen baserar sig på antagandet att  $s_{xy}$  varierar långsamt över bildkoordinaterna  $x$  och  $y$  (vilket är sant för den optiska dämpningen men något tvivelaktigt för övriga shadingfenomen). Därmed kan vi använda samma par av koefficienter ( $c_1, c_2$ ) för ett stort antal närliggande pixels. Vanligt är t ex att använda 64x64 koefficientpar för en 512x512 bild.

Låt oss nu se hur en enkel **kalibrering** kan gå till. För två olika "ljussättningar" A, B med konstant  $f(x, y)$  mäter vi upp svaret  $b(x, y)$ , bl a i punkterna 1) och 2) vars karaktäristika  $s_1$  och  $s_2$  vi kan tänka oss som i Fig. 5. Vi bestämmer nu att det rätta, kalibrerade värdet för dessa två  $f$ -värden är t ex 0.05 respektive 1.0. Detta ger oss ett ekvationssystem för varje bildpunkt (i Fig. 5 är endast  $b_A$  och  $b_B$  för sensor 1 markerade).

$$c_1 [b_A + c_2] = 0.05$$

$$c_1 [b_B + c_2] = 1$$

varur fås i detta fall

$$c_1 = \frac{19/20}{b_B - b_A} \quad (12)$$

$$c_2 = \frac{b_B - 20b_A}{19} \quad (13)$$

Vi ser av Fig. 5 att vi har (mycket grovt) approximerat de två shadingfunktionerna med två räta linjer. Om nu samma ljusintensitet träffar de två sensorelementen svarar de med olika bildvärden  $b_1$  och  $b_2$ . Korrigeringen enligt (11) med utnyttjande av de linjära kalibreringarna innebär att vi tolkar detta som två värden  $\hat{f}_1$  och  $\hat{f}_2$  vilka båda är starkt skilda från det korrekta värdet  $f$  eftersom de verkliga karaktäristikorna är starkt olinjära. Men detta kan vi tolerera så länge skillnaden mellan  $\hat{f}_1$  och  $\hat{f}_2$  är liten. (I Fig. 5 sammanfaller dessa helt och hållet). Därmed elimineras "skuggan", den falska kontrasten, även kallad *Fixed Pattern Noise* i bilden. Att vi lyckas så bra i detta fall beror på att de två funktionerna  $s_1$  och  $s_2$  är likformiga och uppgår i varandra med hjälp av en additiv och en multiplikativ faktor. Lyckligtvis verkar detta ofta vara fallet i verkliga bildsensorer.

### 3 Automatfokusering i ett mikroskop

Eftersom skärpedjupet i ett högupplösande mikroskop är begränsat krävs en nära nog ständig justering av fokalavståndet. I ett manuellt mikroskop arbetar mikroskopisten därför ofta med ena handen på fokus-(=z) ratten. Ett automatiskt mikroskop måste däremot förses med automatfokusering.

Metoden för automatfokusering kan basera sig på bl a

- frekvensanalys
- histogram

Frekvensanalysmetoden utgår från det faktum att defokusering utarmar bilden på höga frekvenser. Histogrammetoden utgår från att defokusering utarmar bilden på starkt vita och på starkt svarta pixel. Bilden blir gråare och variansen i histogrammet minskar.

Som synes krävs i båda fallen en viss beräkningsinsats. I första fallet krävs åtminstone någon form av högpasfiltrering, eventuellt en fullständig frekvensanalys; i andra fallet histogramtagning och variansberäkning. Och även sedan vi på detta sätt erhållit en mätvariabel av fokuseringen, skärpefunktionen  $s(z)$  reda på om vi bör öka eller minska  $z$ .

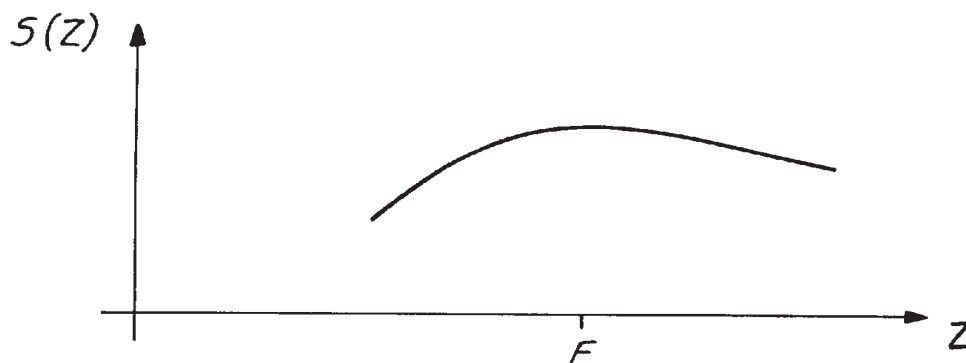
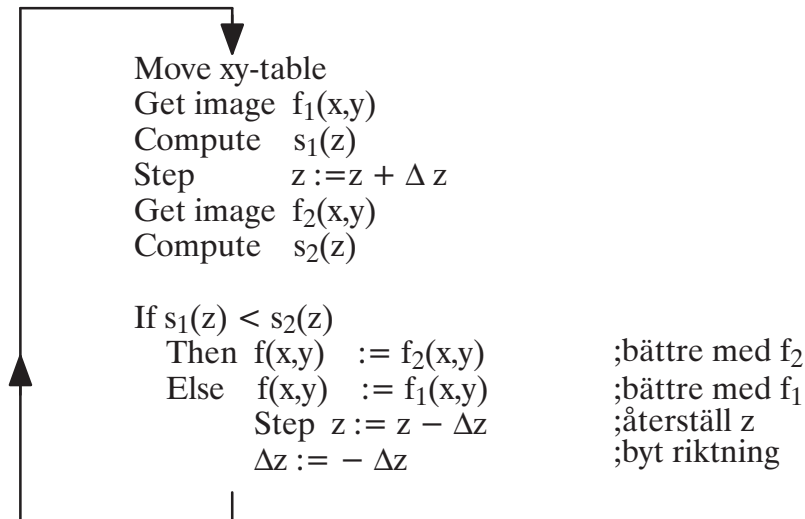


Fig. 6 Skärpan  $s(z)$  som funktion av defokus  $z$ .

Man kan fråga sig om vi här har ett reglerproblem där gängse reglerteknik och regler-teori kan appliceras och inte bara ovanstående enkla styrregel. Svaret är troligtvis negativt eftersom mätobjektet/bilden har nytt informationsinnehåll varje gång vi ska justera fokus. Därmed kommer också funktionen  $s(z)$  att få ett helt annat utseende (men fortfarande ha ett maximum i  $F$ ).

Med beteckningen  $f_1(x,y)$ ,  $f_2(x,y)$  för högupplösta bilder kan man tänka sig följande fokuseringsalgoritm



Vi observerar att man tar in två bilder för varje nytt xy-läge av stegbordet. Som resultat  $f(x,y)$  använder vi naturligtvis den som har störst skärpevärde  $s(z)$ . Samtidigt utnyttjar vi "tendensen" till ökad eller minskad skärpa så att om exempelvis  $s_1(z) > s_2(z)$  så låter vi  $\Delta z$ -steget i nästa bild ha en riktning motsatt den vi nyss använt. Detta är uppenbarligen en lämplig strategi om våra bilder ligger uteslutande i xy-planet och om det ideala  $z$ -läget ändrar sig relativt långsamt. Se Fig. 7.

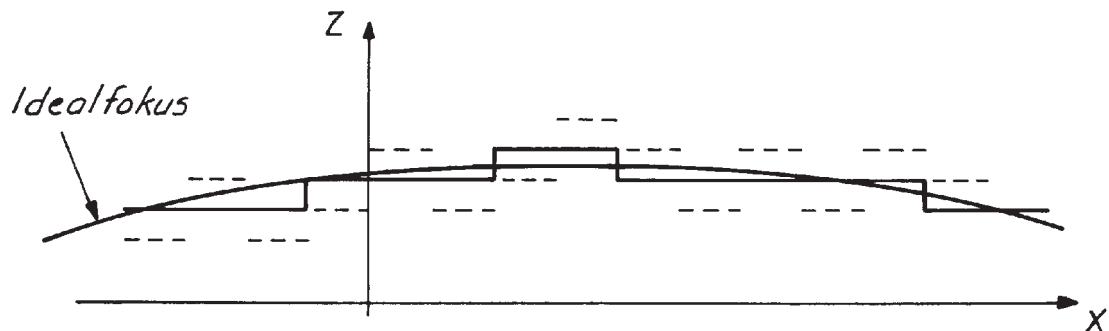


Fig. 7

Flera automatiska mikroskop utnyttjar linjära arrayer. Stegbordet utnyttjas då för skanning i exempelvis  $y$ -led, arrayen själv skannar elektroniskt i  $x$ -led. I dessa system inför man ofta ytterligare två linjära arrayer för automatfokusering. Se Fig. 8. Array 0 är den detektor som ska ligga i fokus. Array 1 och 2 är placerade strax bakom respektive framför det ideala fokalplanet. Genom att ur  $f_1(x)$  och  $f_2(x)$  samtidigt derivera skärpemått  $s_1(z)$  och  $s_2(z)$  kan man åstadkomma bättre och snabbare styralgoritmer. Under rimliga förhållanden vet vi att array 0 ligger i fokus om  $s_1 = s_2$ . Vidare gäller att variabeln  $(s_1 - s_2 > 0)$  entydigt bestämmer åt vilket håll  $z$  bör justeras.



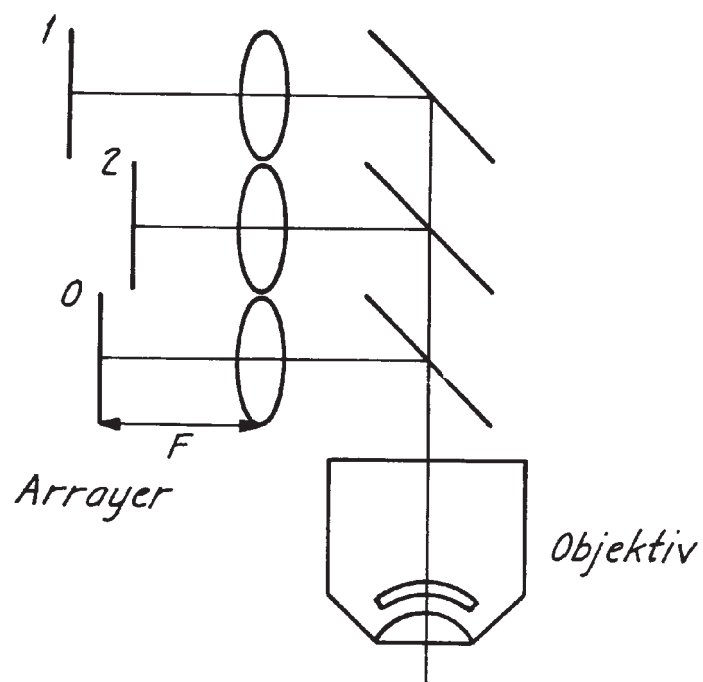


Fig. 8 Ett autofokussystem.

En svaghet med autofokussystemet i Fig. 8 är att det blir verkningslöst om bilden saknar frekvenskomponenter i x-led.

## 4 Konfokal mikroskopi

Flying-spot principen har använts också i samband med mikroskopi. Av intresse är framför allt de möjligheter som erbjuds med lasern som belysningskälla. Ett lasermikroskop skulle principiellt kunna utföras som i Fig. 9.

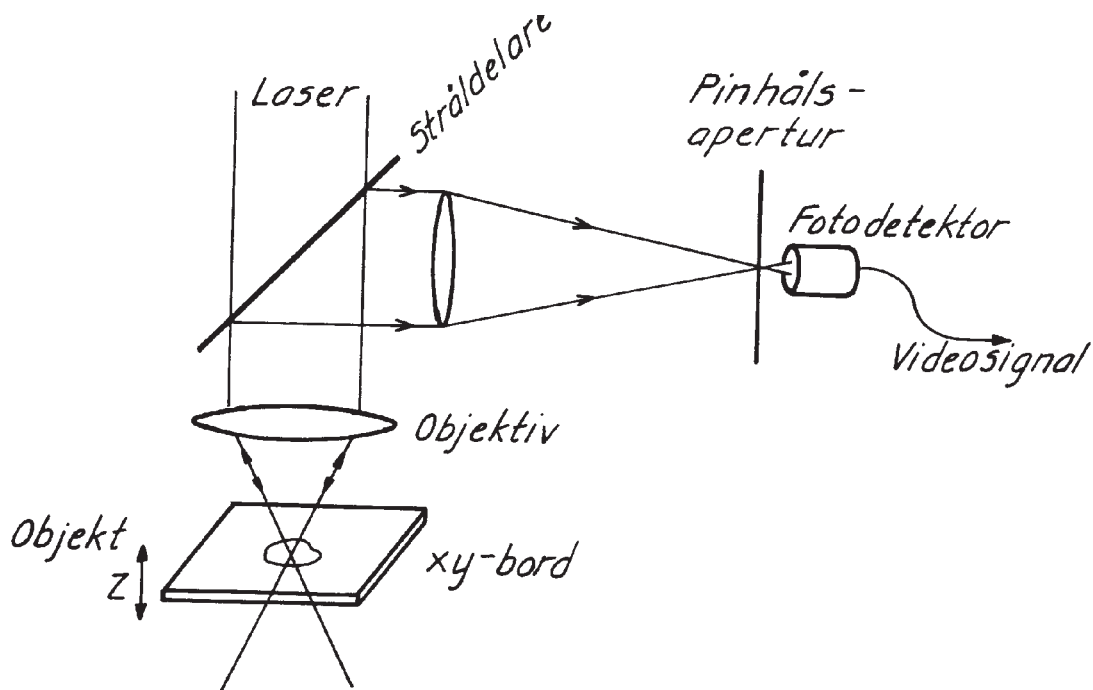


Fig. 9 Ett lasermikroskop.

Laserljuset infaller mot objektet via en stråldelare och objektivet. Det **reflekterade** ljuset går samma väg tillbaka och en del därav (säg 80 %) kan sändas till fotodetektorn. Redan här avhänder vi oss möjligheten att avbilda objektet med transmitterat ljus.

Skanningen i xy-planet kan vi tänka oss utförd rent mekaniskt. Det är t ex möjligt att fästa in objektet i en hållare som vibrerar i horisontalplanet med, säg 50 Hz vilket ger 100 linjer/sek. Ett annat alternativ är att utföra skanning i bildplanet (galvanometerspeglar, polygonprismor) mellan objektiv och stråldelare. I vilket fall som helst kommer såväl infallande laserstråle som detektorsystem och objektiv att förbli statiska.

En revolutionerande nyhet (återupptäckt ca 1980) med uppställningen enligt Fig. 9, är att den medger optisk sektionering av tjocka preparat, dvs det är möjligt att skapa en 3D-bild av objektets volym. Förutsättningarna för detta är att objektet är relativt transparent och att materialet har fluorescensfärgats. Det infallande laserljuset "tänder" lysande punkter vars ljusstyrka är linjärt beroende av infallande intensitet. Den resulterande 3D-bilden representerar sedan i varje **voxel** (=volume element) mängden fluorescens.

En intuitiv förståelse att detta är möjligt fås av Fig. 10 som visar det tjocka preparatet mera i detalj. Antag först att **aperturen till detektorn är stor**, dvs att all återstrålning från objektet fångas upp. Belysningen (Illuminationen) bildar en strålkon där spetsen är

oändligt fin (om vi bortser från diffraktionseffekter) och vilar i fokalplanet. På ett avstånd  $z$  från fokalplanet är strålkonens diameter  $z D/F_1$  och tvärsnittsarean  $\pi(z \cdot D/2F_1)^2$ . Illumineringen  $i$  varierar med  $z$  enligt

$$i(z) = \frac{P}{\pi} \cdot \left( \frac{2F_1}{z \cdot D} \right)^2$$

där  $P$  är den totala ljuseffekten från lasern. Voxels som ligger långt från fokalplanet kommer därför att ge ett mycket litet bidrag till den totala ljusmängd som returneras från objektet **i ett visst ögonblick**. Om vi nu emellertid skannar objektet, dvs strålkonens spets förflyttas i små steg över fokalplanet så finner vi att en viss voxel kommer att finnas inom strålkonen under ett antal sådana lägen. Det totala antalet förekomster inom strålkonen är naturligtvis åter proportionellt mot tvärsnittsarean  $\pi(z \cdot D/2F_1)^2$ . Tidsintegralen av  $i(z)$  är därför konstant och oberoende av  $z$  men stort  $z$  gör att det totala bidraget från en punkt i objektrymden sprids ut på många punkter i den skannade bilden.

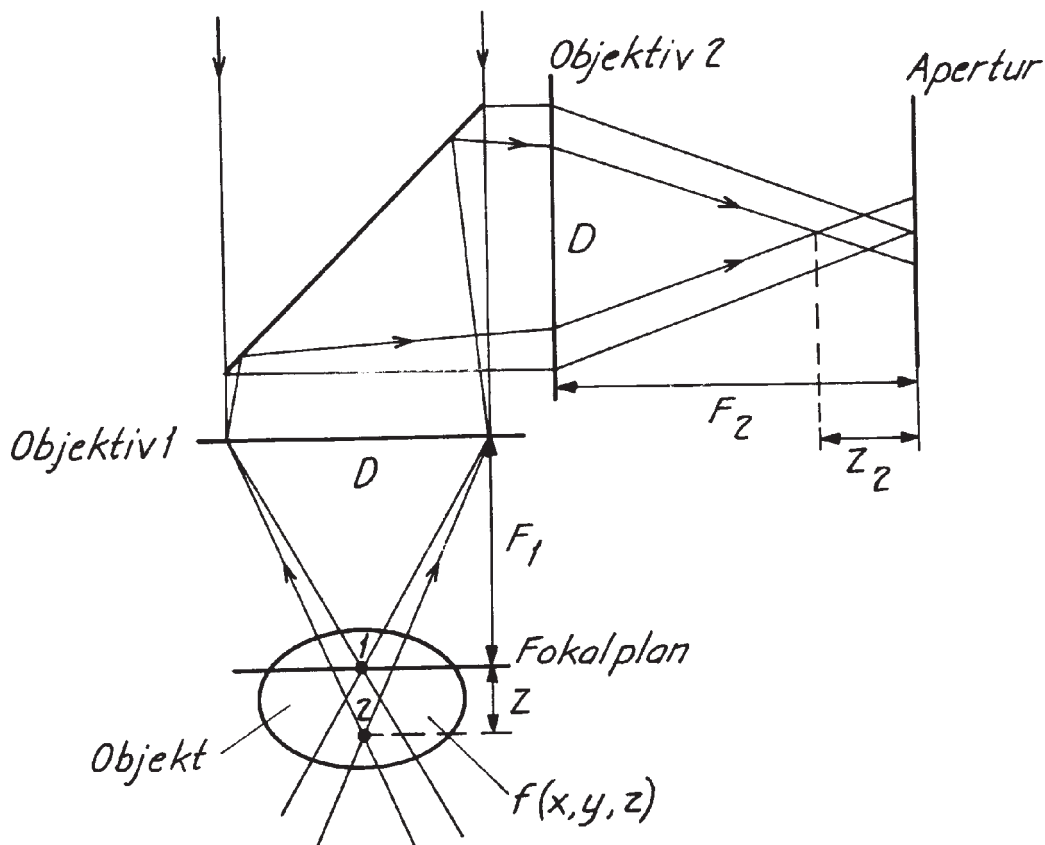


Fig. 10 Principen för ett konfokalt mikroskop.

Punktspridningsfunktionen för illumineringen  $i(x, y, z)$  för det fluorescerande laser flyng-spot mikroskopet är därmed känd i grova drag. Den ser ut som i Fig. 11 för några olika värden på  $z$ . Samtliga dessa  $z$ -värden antas vara stora i förhållande till strålkonens

spets. Enligt avsnitt 1 är spetsens tvärsnittsdiameter  $d_1 \approx \lambda \cdot F_1 D$ . Här är alltså inte intensiteten oändlig utan

$$i(0) \approx \frac{P}{\pi} \left( \frac{2D}{\lambda F_1} \right)^2$$

och vi får

$$i_1(z) = i(0) \cdot \left( \frac{F_1}{D} \right)^4 \cdot \left( \frac{\lambda}{z} \right)^2$$

Vi är emellertid nu i första hand intresserade av fjärrzonen, dvs  $z \gg d$ .

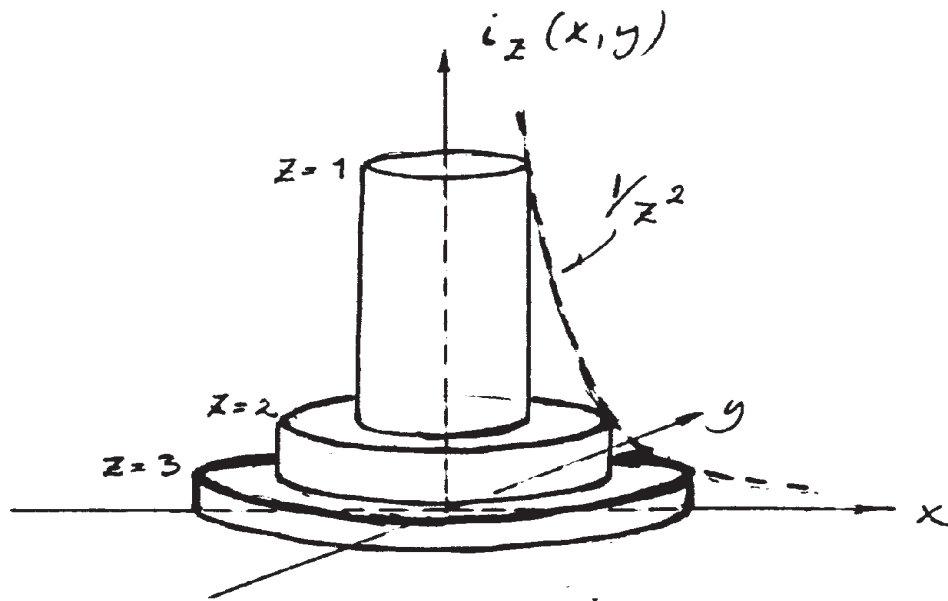


Fig. 11 Punktspridningsfunktionen för illumineringen för det fluorescerande flying-spot mikroskopet.

Bilden, dvs den återstrålade ljusintensiteten  $g(x, y, z)$  då skannern står med strålkonspeten i punkten  $(x, y, z)$  är summan av vad som anländer från varje  $z$ -plan i objektet och från varje plan kommer det som ges av faltningen

$$f_z(x, y) \cdot i_z(x, y)$$

där  $i_z(x, y)$  beskrivs av Fig. 11.

Ännu kompaktare uttrycks detta som en 3D-faltning

$$g(x, y, z) = f(x, y, z) * i(x, y, z)$$

$$g(x, y, z) = \iiint f(x - \alpha, y - \beta, z - \gamma) \cdot i(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma$$

Avbildningen av objektvolymen  $f(x,y,z)$  till bildvolymen  $g(x,y,z)$  sker via strålkonens punktspridningsfunktion = illumineringen i  $(x,y,z)$ .

Av den alltmer tillplattade form som  $i(x,y,z)$  har i xy-planet för ökande  $z$  så inses att objektplanen  $f(x,y)$  utanför fokus bidrar till  $g(x,y,z)$  i allt lägre frekvensband. Men, som tidigare påpekats, så blir det totala bidraget till  $g$  från ett visst objektplan  $f(x,y,z)$  detsamma för alla  $z$ .

Antag nu att vi placerar en **pinhålsapertur** före detektorn såsom indikerats i Fig. 9 och Fig. 10. Som framgår av Fig. 10 så kommer återstrålningen från en punkt 2 utanför fokalplanet att praktiskt taget helt blockeras av aperturen.

Låt oss kvantifiera denna observation. Antag att vi ger aperturpinhålet diametern

$$d_2 = \lambda \cdot F_2/D$$

dvs lika med maximal upplösning med objektiv 2. Ljus som kommer från en punkt på avståndet  $z_1$  från fokalplanet i Fig. 10 kommer att brytas samman av objektiv 2 på avståndet  $z_2$  från aperturplanet.

$$z_2 = -z_1 \cdot \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2$$

vilket samband enkelt härleds genom differentiering av den vanliga linsformen med förutsättningen att  $|z_1| \ll F_1$ ,  $|z_2| \ll F_2$ .

Vidare inser vi att ljuset från punkten 2 sprids ut över en area med diametern

$$D_2 = z_2 \cdot D/F_2$$

Antag att fluoroscenseffekten har ljusutbytet 1. Den återspeglade ljuseffekten från punkten 2 är då densamma som den tidigare illumineringen

$$i_1(z_1) = i(0) \left(\frac{F_1}{D}\right)^4 \cdot \left(\frac{\lambda}{z}\right)^2$$

Av detta träffas detektorn av

$$i_2(z) = i_1(z) \left(\frac{d_2}{D_2}\right)^2 = i(0) \left(\frac{F_1}{D}\right)^4 \cdot \left(\frac{\lambda}{z_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{F_2}{D}\right)^4 \cdot \left(\frac{\lambda}{z_2}\right)^2$$

vilket med ovanstående uttryck för  $z_2$  kan skrivas

$$i_2(z) = i(0) \left(\frac{F_1}{D}\right)^8 \cdot \left(\frac{\lambda}{z}\right)^4$$

Om vi vid bilduppfångningen använder yttinkrement, pixels, av storleken  $d^2$  kommer detta  $i_2(z)$  att ge sitt bidrag

$$\left(\left(\frac{z \cdot D}{F_1}\right) \cdot \frac{1}{d}\right)^2 = \left(\frac{D}{F_1}\right)^4 \cdot \left(\frac{z}{\lambda}\right)^2 \text{ ggr}$$

Av detta följer att det totala (lågpassfilterade) bidraget till ett bildplan från en punkt på avståndet  $z$  i objektrymden nu blir

$$\iint i_2(z) dx dy = i(0) \cdot d^2 \cdot \left(\frac{F_1}{D}\right)^4 \cdot \left(\frac{\lambda}{z}\right)^2$$

Sammanfattningsvis konstaterar vi följande. I kedjan från belysning till detektering sker utdämpningen av bidrag från omgivande fokalplan i två moment: genom fokusering av belysningen och genom fokusering av detekteringen. Den dubbla fokuseringseffekten är orsaken till beteckningen **konfokal mikroskopi**. Var för sig åstadkommer en sådan fokusering en dämpning och punktspridning av bidragen från objektvolymens plan som är ekvivalent med lågpassfiltrering med bibehållet effektinnehåll ( $i_1(z) \sim 1/z^2$ ). Tillammans ger de en dämpning av effektinnehållet med faktorn  $1/z^2$ . I stort sett kan vi därmed anse att all uppfångad information härrör från fokalplanet.

Vi observerar också  $z$ -diskrimineringens beroende av objektivets  $F$ -tal  $F_1/D$ : i potensen 8 för själva punktspridningen och i potensen 4 för totalenergin. Den konfokala principen är alltså framför allt tillämpbar på mikroskopi där objektiv med höga  $F$ -tal förekommer.

Den tidigare signalteoretiska beskrivningen av funktionen  $i(x,y,z)$  som avbildar objektrymden  $f(x,y,z)$  på bildrymden  $g(x,y)$

$$i : f \rightarrow g$$

blir nu

$$g(x,y,z) = f(x,y,z) * i^2(x,y,z)$$

dvs det konfokala mikroskopets punktspridningsfunktion är kvadraten av den enkla optiska punktspridningsfunktionen.

Det exakta 3D-utseendet av  $i(x,y,z)$  presenteras inte här men kan studeras i optisk facklitteratur t ex i Born and Wolf, "Principles of Optics", Section 8.8.

## 5 Härledning av punktspridningsfunktionen och upplösningen för ett optiskt system

I avsnitt 1 gavs en formel för upplösningen  $1/d$  i ett optiskt system där  $d$  är diametern på det optiska systemets punktspridningsfunktion. Vi ska nu härleda ekvationen för  $d$ , dvs (2). Se Fig. 12 som visar ett en-dimensionellt optiskt system.

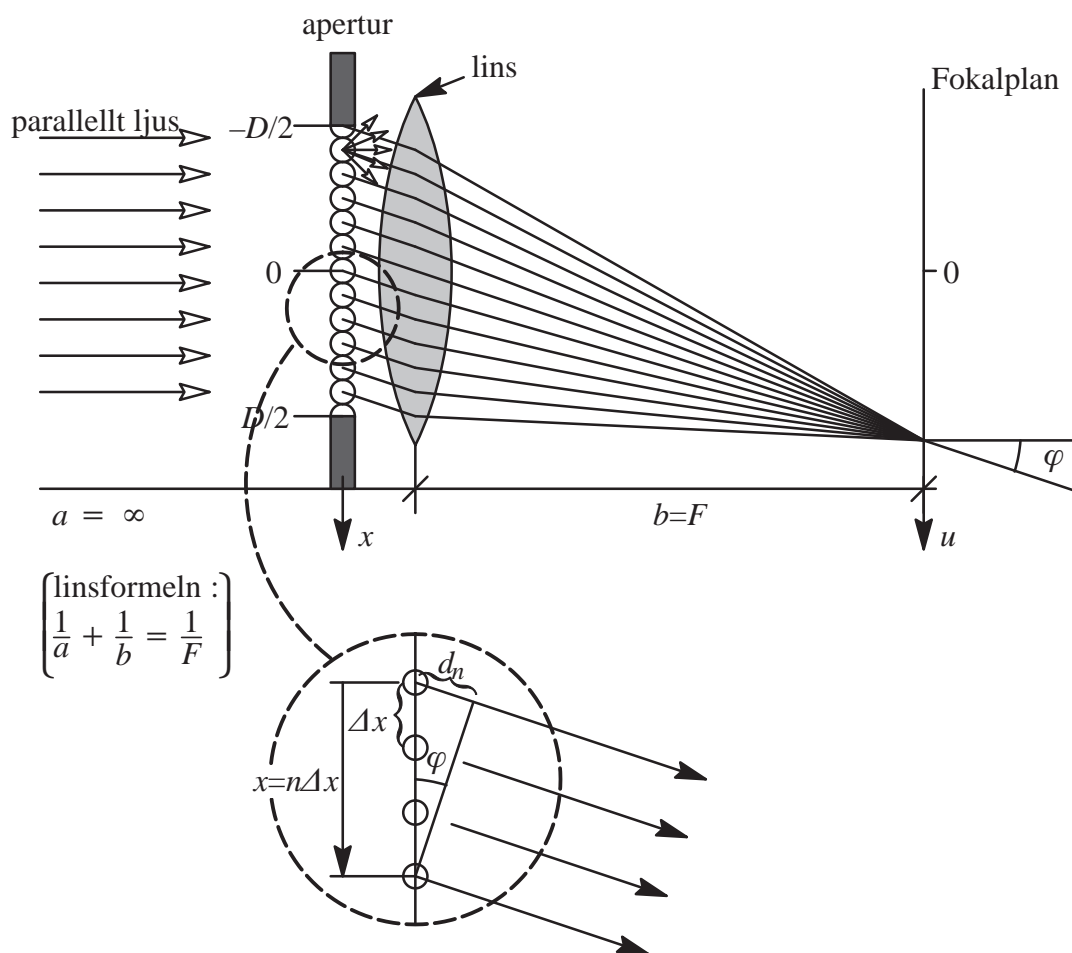


Fig. 12 Geometri för ett endimensionellt optiskt system i syfte att härleda punktspridningsfunktionen.

Antag att vi har parallellt koherent ljus från en avlägsen punktkälla som faller in mot en apertur med öppningen  $D$ . Då inträffar diffraction, dvs vågen kommer att uppföra sig som ett set av små punktkällor som strålar i alla riktningar. Antag att vi har  $N$  små källor med inbördes avstånd  $\Delta x$  som sänder ut sfäriska vågor  $(A/N)\exp(-jr\,2\pi/\lambda)$ . Då gäller att

$$N\Delta x = D.$$

Fig. 12 ger att vägskillnaden i riktning  $\varphi$  mellan två olika källors vågor är

$$d_n = n\Delta x \cdot \sin \varphi.$$

Fasskillnaden mellan två olika källor är därmed  $d_n 2\pi/\lambda$  där  $\lambda$  är våglängden. Summera nu bidragen från alla enskilda källor,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-N/2}^{N/2} \frac{A}{N} e^{-j r_n 2\pi/\lambda} = \\ &= \sum_{n=-N/2}^{N/2} \frac{A}{N} e^{-j d_n 2\pi/\lambda} = \sum_{n=-N/2}^{N/2} \frac{A}{N\Delta x} e^{-j 2\pi n \Delta x \sin \varphi / \lambda} \cdot \Delta x \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{-D/2}^{D/2} \frac{A}{D} e^{-j 2\pi x \sin \varphi / \lambda} dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin \varphi \approx \tan \varphi \\ \tan \varphi = u/F \end{array} \right\} \approx \\ &\approx \int_{-D/2}^{D/2} \frac{A}{D} e^{-j 2\pi x u / F\lambda} dx = \\ &= \frac{A}{D} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x}{D}\right) e^{-j 2\pi x u / F\lambda} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = tF\lambda \\ \frac{dx}{dt} = F\lambda \end{array} \right\} = \\ &= \frac{AF\lambda}{D} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{F\lambda}{D} t\right) e^{-j 2\pi t u} dt = \frac{AF\lambda}{D} \mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{F\lambda}{D} t\right)\right] = \\ &= \{\text{skalningsteoremet}\} = A \cdot \text{sinc}\left(\frac{D}{F\lambda} u\right) \end{aligned} \quad (14)$$

Det gäller alltså att en avlägsen punktkälla alstrar en sinc-funktion i fokalplanet. **Punktspridningsfunktionen för ett en-dimensionellt optiskt system med koherent ljus enligt Fig. 12 är alltså en sincfunktion.** Denna sincfunktion är fouriertransformen av aperturen

$$\frac{F\lambda}{D} \cdot \mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{F\lambda}{D} t\right)\right] = \text{sinc}\left(\frac{D}{F\lambda} u\right), \quad \text{där } \Pi\left(\frac{F\lambda}{D} t\right) = \Pi\left(\frac{x}{D}\right).$$

Det går att generalisera (14) till två dimensioner. Resultatet blir då

$$A \cdot 2 \text{jinc}\left(\frac{D}{F\lambda} R\right), \quad R^2 = u^2 + v^2, \quad (15)$$

dvs att i fokalplanet alstras en jinc-funktion. Förklaringen till att sinc-funktionen i 1D-fallet övergår till en jinc-funktion i 2D-fallet diskuteras nedan.

I linsplanet  $(x,y)$  har vi nu linsaperturen i form av en cirkulär skiva istället för en rektangelfunktion. Fourier-transformen av en rektangel är ju en sinc-funktion. Nu är emellertid linsaperturen cirkulärt tvådimensionell. För denna gäller att dess Fourier-transform också är cirkulärsymmetrisk. Radiellt återfinns då inte sinc-funktionen utan den sinc-liknande jinc-funktionen. Det gäller för en cirkulär skiva

$$h(r) = h(x,y) = \Pi(r), \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (16)$$



att

$$H(R) = H(u, v) = \mathcal{F}[h(r)] = 2 \operatorname{jinc}(R) = \frac{2J_1(\pi R)}{\pi R}, \quad R^2 = u^2 + v^2, \quad (17)$$

där  $J_1$  är Besselfunktionen av 1:a ordningen. (I Fig. 14 finns några Besselfunktioner skissade.) Eftersom sinc-funktionen skalades med  $D/F\lambda$  i ekvation (14) ska detta också göras med jinc-funktionen i (15). **Punktspridningsfunktionen för ett två-dimensionellt optiskt system med cirkulär apertur och koherent ljus är alltså:**

$$2 \operatorname{jinc}(DR/F\lambda) = \frac{2J_1(\pi DR/F\lambda)}{\pi DR/F\lambda}. \quad (18)$$

Då det gäller inkoherent ljus visar det sig att man måste beakta energin, dvs kvadraten på ekvation (18) istället. Vi bevisar inte detta här.

Fouriertransformens energi, dvs intensitetsfunktionen  $I(\cdot)$ , är skissad i Fig. 13 och ges av ekvationen

$$I(R) = [2 \operatorname{jinc}(DR/F\lambda)]^2 = \left[ \frac{2J_1(\pi DR/F\lambda)}{\pi DR/F\lambda} \right]^2. \quad (19)$$

Det gäller alltså att **punktspridningsfunktionen för ett två-dimensionellt optiskt system med cirkulär apertur och inkoherent ljus är ges av ekvation (19).**

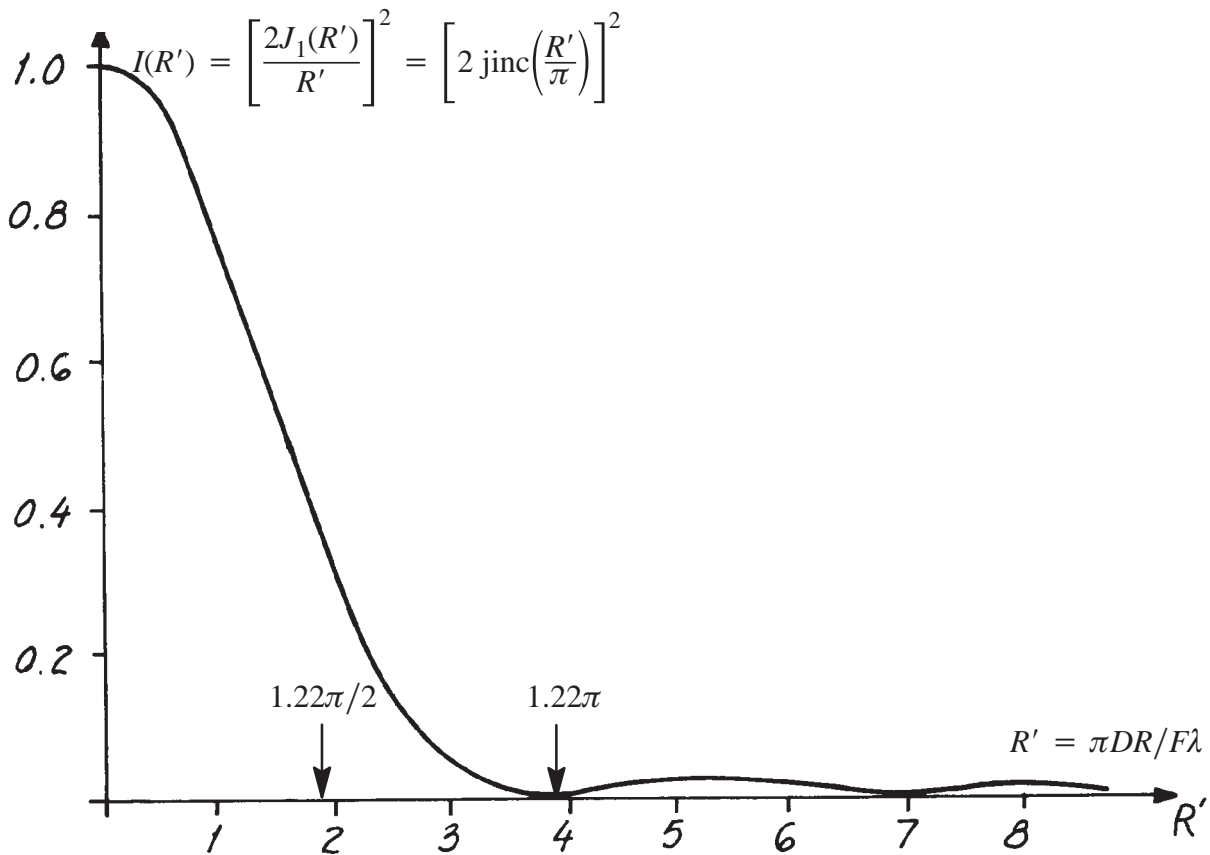


Fig. 13 Intensitetsfunktionen  $I(\cdot)$ .

Låt oss nu definiera bredden av strålkonspetsen till hälften av intervallet mellan nollgångarna i  $I(\cdot)$ , dvs

$$-1.22 \frac{\pi}{2} \lesssim \pi DR / F\lambda = R' \lesssim 1.22 \frac{\pi}{2} \quad (20)$$

Spetsens diameter  $d \approx 2R$  blir då

$$d \approx 1.22 \cdot \lambda \cdot \frac{F}{D}$$

i enlighet med vad vi antog redan i ekvation (2) och (3).

### Bessel functions $J_p(x)$

$$\begin{cases} J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}, & (p \neq \text{integer}) \quad (0 < x < \infty) \\ J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi - n\varphi) d\varphi, & n=0, 1, 2, \dots \\ J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), & n=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

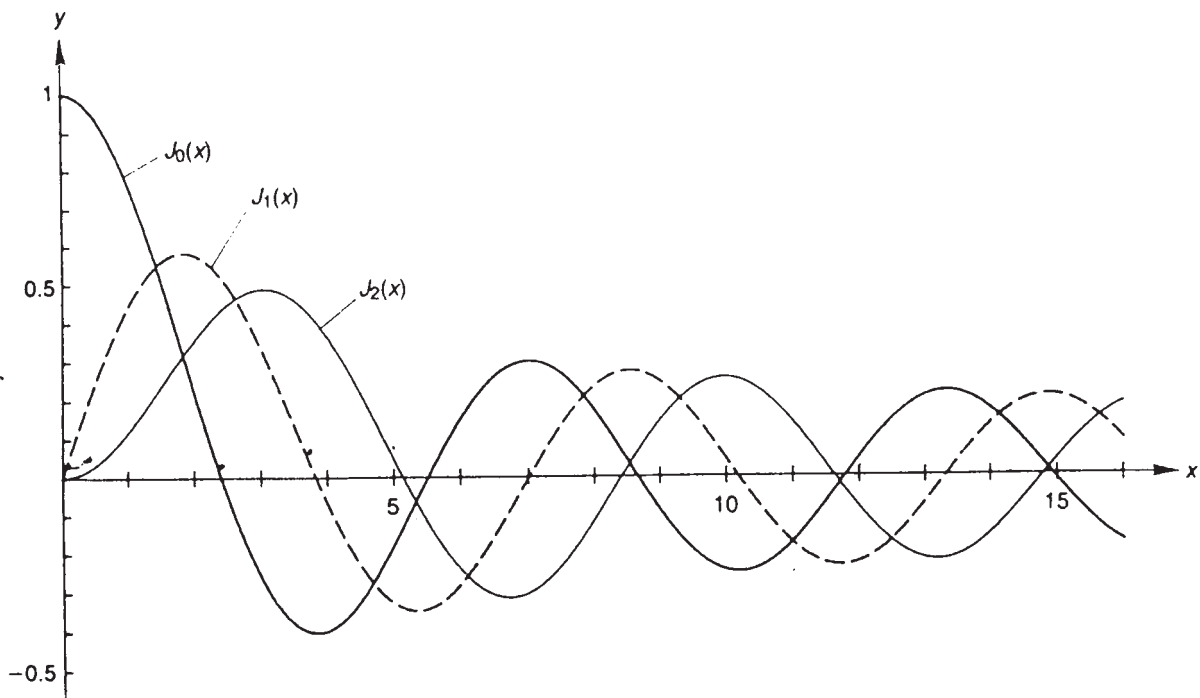


Fig. 14 Besselfunktioner.

## Referenser

- [5.1] Francis T.S. Yu and Suganda Jutamulia, *Optical Signal Processing, Computing and Neural Networks*, Wiley 1992.