

Härledning av PSF för en tunn lins

R. Forchheimer

2020-11-18

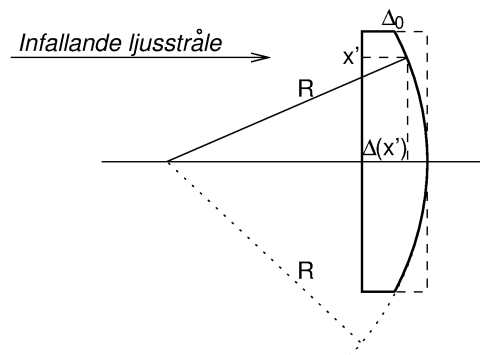
Inledning

I kursen TSBB09 – Bildsensorer ingår en beskrivning av Point-Spread-Function (PSF) för en lins med begränsad apertur. I kursen görs gällande (utan bevis) att PSF bestäms av aperturen och att linsens funktion endast är att lägga bilden av PSF på avståndet f från linsen, där f är linsens fokallängd (i stället för i oändligheten).

Ett vanligt sätt att härleda linsers och aperturers påverkan är att utgå från Fresnels diffraktionsintegral. Vanligtvis härleds inte diffraktionsintegralen utan den tas för given. Om det endast är aktuellt att härleda linsens PSF så kan detta göras relativt enkelt direkt från Huygens vågrörelsemodell och med lämpliga approximationer. Vad vi önskar visa är att en parallellt infallande plan ljusvåg bryts mot en punkt på avståndet f från linsen och att ljusfördelningen kring denna punkt (dvs PSF:en) beskrivs av Fouriertransformen av aperturen (multiplikerad med en fasfunktion). Detta innebär att intensiteten, dvs "Airys disk" som uppstår om ett fysiskt bildplan placeras på detta avstånd, kommer att utgöras av aperturens spektralfunktion. Vår härledning görs i en dimension men kan enkelt utvidgas till två dimensioner.

En tunn lins

Vi utgår från en plan-konkav lins med krökningsradie R och maximal tjocklek Δ_0 , enligt figur 1. (Det är ingen principiell skillnad om vi antar att linsen båda sidor är krökta.) Vi antar vidare att linsen är tunn och $\Delta_0 \ll R$. Linsen är utförd i ett material (exempelvis glas) med ett brytningsindex n som är större än i luft. Detta innebär att ljuset rör sig långsammare i linsen än utanför vilket skapar en fasskillnad mellan ljusstrålar som tar sig igenom linsen på olika höjd.



Figur 1. Plan-konkav lins

Vi tänker oss nu en rektangulär box som inkapslar linsen. En horisontell ljusstråle på höjden x' kommer således att gå igenom linsen en sträcka $\Delta(x')$ och därefter genom luft under sträckan $\Delta_0 - \Delta(x')$. Eftersom linsen är tunn antas ljusstrålen komma ut på samma höjd x' . Geometrin ger att

$$\Delta(x') = \Delta_0 - \left(R - \sqrt{R^2 - x'^2} \right) \approx \Delta_0 - \frac{x'^2}{2R}$$

där den sk paraxial-approximationen har använts ($x' \ll R$).

Den "skenbara" sträckan i linsen kommer att bli längre för ljuset (med faktorn n) jämfört med sträckan i luft. Dvs, optiskt sett så blir den totala sträckan

$$\delta(x') = n\Delta(x') + (\Delta_0 - \Delta(x')) = n\Delta_0 - (n-1)\frac{x'^2}{2R} = n\Delta_0 - \frac{x'^2}{2f}$$

Där "linsmakarens formel" $1/f = (n-1)/R$ har använts.

Fastransformationen som skapas av linsen kan representeras med den komplexa fasfunktionen

$$T_L(x') = e^{-i\frac{k}{2f}x'^2} \quad \text{där } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

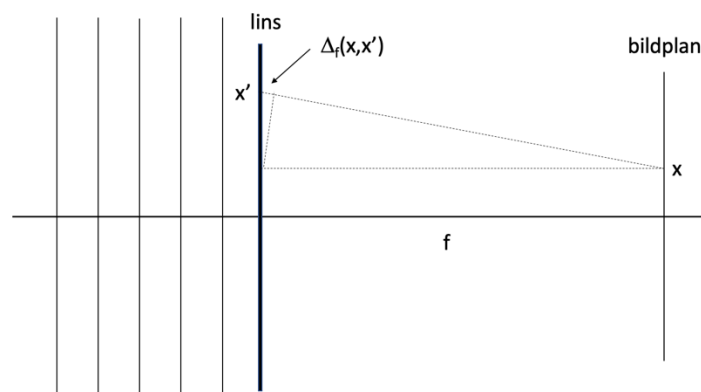
där fasskillnaden som skapas av $n\Delta_0$ är oberoende av x' och därför kan bortses ifrån.

Optiska systemet

Det optiska systemet visas i figur 2. En koherent planparallell våg infaller mot linsen. Enligt Huygens ljusmodell kan vi betrakta alla utgående punkter från linsen som punktkällor med utsträckning dx' . Låt oss betrakta en punkt på höjden x i fokalplanet (på avståndet f från linsen) och en ljusstråle som utgår från punkten x' och når punkten x . I förhållande till sträckan f fås gångvägsskillnaden

$$\Delta_f(x, x') = \sqrt{(x' - x)^2 + f^2} - f \approx \frac{(x' - x)^2}{2f}$$

Där återigen paraxial-approximationen har använts.



Figur 2: Optiska systemet. Infallande ljus är en plan våg

Fastransformationen som skapas av ljusets väg mellan linsen och fokalplanet kan således skrivas

$$T_f = e^{i\frac{k}{2f}(x'-x)^2}$$

Under antagandet att det infallande ljuset mot linsen har intensiteten $\Psi = 1$ och fasläget 0, samt att vi har en apertur som påverkar intensiteten enligt funktionen $\text{rect}(x')$ så fås ljusfördelningen i linsens fokalplan enligt

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x') \cdot T_L \cdot T_f dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x') \cdot e^{-i\frac{k}{2f}x'^2} \cdot e^{i\frac{k}{2f}(x'-x)^2} dx' = \\ &= e^{i\frac{k}{2f}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x') e^{-i\frac{k}{f}xx'} dx'\end{aligned}$$

Om längdskalan i fokalplanet normeras enligt $u = x/(\lambda f)$ kan vi skriva detta som

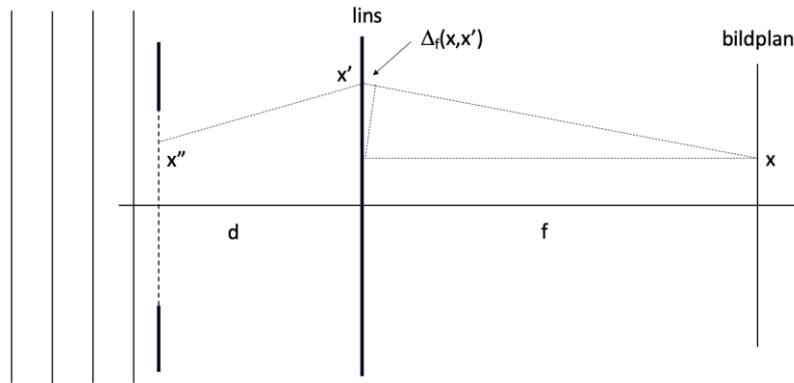
$$\psi(u) = e^{i\pi\lambda f u^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x') e^{-i2\pi u x'} dx'$$

Vilket är detsamma som Fouriertransformen av $\text{rect}(x')$ multiplicerat med en fasfunktion som varierar över fokalplanet. Vad gäller intensiteten $|\psi(u)|^2$ (dvs Airys disk) så påverkas denna naturligtvis inte av fasfunktionen.

Specialfall: Exakt Fouriertransform

På grund av fasfunktionen $\exp(ikx^2/(2f))$ har vi alltså inte en ren Fouriertransform. Se figur 2. Antag att ett objekt (eller apertur) inte befinner sig vid linsen, utan på avståndet f framför linsen. Det visar sig då att fasförskjutningen från aperturen fram till linsen följer exakt samma formel som den mellan linsen och bildplanet. Det betyder att det dyker upp en ny kvadratisk fasfunktion med omvänt tecken som tar ut den första. För bevis se nedan. Slutsatsen är att ett objekt (eller apertur) som befinner sig på avståndet f framför linsen kommer att få en exakt Fouriertransform i fokalplanet.

Bevis för specialfallet exakt Fouriertransform



Inför fastransformen mellan aperturen och linsen

$$T_A = e^{i\frac{k}{2d}(x''-x')^2}$$

Där x'' utgör höjdkoordinat längst aperturen och d är avståndet mellan aperturen och linsen. Vårt tidigare uttryck för fältet i bildplanet modifieras till

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x'') \cdot T_A \cdot T_L \cdot T_f dx' dx'' = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x'') \cdot e^{i\frac{k}{2d}(x''-x')^2} \cdot e^{-i\frac{k}{2f}x'^2} \cdot e^{i\frac{k}{2f}(x'-x)^2} dx' dx'' = \\ &= e^{i\frac{k}{2f}x^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x'') \cdot e^{i\frac{k}{2d}(x''-x')^2} \cdot e^{-i\frac{k}{f}xx'} dx' dx'' = \\ &= e^{i\frac{k}{2f}x^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x'') e^{i\frac{k}{2d}x''^2} e^{i\frac{k}{2d}x'^2} \cdot e^{-i\frac{k}{d}x''x'} e^{-i\frac{k}{f}xx'} dx' dx'' = \\ &= e^{i\frac{k}{2f}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x'') \cdot e^{i\frac{k}{2d}x''^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k}{2d}x'^2} e^{-ix'(\frac{k}{d}x'' + \frac{k}{f}x)} dx' dx'' =\end{aligned}$$

Sätt:

$$\left\{ \frac{ak}{d} = \frac{k}{d}x'' + \frac{k}{f}x \Rightarrow a = x'' + \frac{d}{f}x \right\}$$

Kvadratkomplettera:

$$\begin{aligned}
 & e^{i\frac{k}{2f}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x'') \cdot e^{i\frac{k}{2d}x''^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k}{2d}(x'-a)^2} \cdot e^{-i\frac{k}{2d}a^2} dx' dx'' = \\
 & e^{i\frac{k}{2f}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x'') \cdot e^{i\frac{k}{2d}x''^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k}{2d}(x'-a)^2} \cdot e^{-i\frac{k}{2d}(x''+\frac{d}{f}x)^2} dx' dx'' = \\
 & e^{i\frac{k}{2f}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x'') \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k}{2d}(x'-a)^2} \cdot e^{-i\frac{kd}{2f^2}x^2} \cdot e^{-i\frac{k}{f}x''x} dx' dx'' = \\
 & e^{i\frac{k}{2f}x^2} \cdot e^{-i\frac{kd}{2f^2}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x'') \cdot e^{-i\frac{k}{f}x''x} dx'' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k}{2d}(x'-a)^2} dx'
 \end{aligned}$$

Gör följande substitution:

$$\left\{ \frac{k}{2d}(x'-a)^2 = z^2 \Rightarrow dx' = dz \cdot \sqrt{\frac{2d}{k}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k}{2d}(x'-a)^2} dx' = \sqrt{\frac{2d}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz^2} dz \right\}$$

Och använd (Fresnels integral):

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz^2} dz = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4} \right\}$$

$$\psi(x) = e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi d}{k}} e^{i\frac{k}{2f}x^2(1-\frac{d}{f})} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x'') \cdot e^{-i\frac{k}{f}x''x} dx''$$

Sätter vi $d = f$ så blir faktorn framför integralen endast en (komplex) konstant.

Härledningar av Fresnels integral finns exempelvis på

<https://www.youtube.com/watch?v=XDUZ8bGdvYs>

<https://math.stackexchange.com/questions/1522926/integral-of-eix2>