# Optiska system

*Per-Erik Danielsson (och något Maria Magnusson)*

Detta avsnitt innehåller material av blandad karaktär. Vi börjar med att studera avbildningsegenskaperna hos en vanlig lins. I nästa sektion visar vi hur kunskapen om dessa kan utnyttjas för att korrigera intensiteten i en bild, sk shadingkorrektion. Därefter behandlas konfokala mikroskop, som är intressanta pga av möjligheten att registrera riktiga 3D-volymer. Slutligen härlededer vi punktspridningsfunktionen och upplösningen för ett optiskt system.

# 1 Avbildningsegenskaper hos en enkel lins

I det enklaste fallet har ett linssystem eller en kamera en cirkulär apertur (öppning) med diametern $D$. En lins bryter samman alla strålar från en punktkälla till en enda punkt i bildplanet. Om linsen är tunn, räknar man med att linsen endast gör detta, dvs den ger inte upphov till några distorsioner. Linslagen är illustrerad i Fig. 1. Den säger att om bildplanet ligger på avståndet $b$ från linsen så hamnar ett objekt i världen på avståndet $a$ från linsen i bästa möjliga skärpa på bildplanet. Det gäller att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}, \tag{1}$$

Fokalavståndet $F$ är en egenskap hos linsen. Notera att för en punktkälla på långt avstånd från linsen gäller att $b \approx F$. Om ett objekt i världen ligger på ett avstånd från linsen som är skilt från $a$ så blir detta objekt mer eller mindre oskarpt på bildplanet. Hur oskarpt det blir beror på linssystemets skärpedjup som definieras nedan.

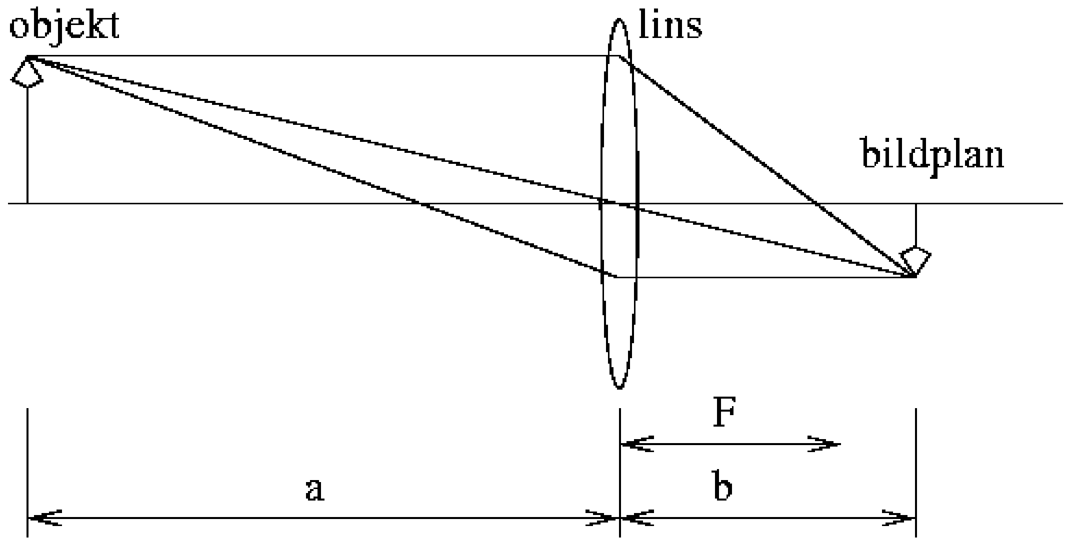


*Fig. 1 Linslagen illustrerad.*

Linsens diameter $D$ och fokalavståndet $F$ bestämmer både **skärpa** (upplösning) och **skärpedjup**. Diametern $d$ i strålkonens spets i fokalplanet är inte oändligt liten utan bestäms av diffraktionseffekter till ungefär

$$d \approx 1.22 \cdot \lambda \cdot \frac{F}{D}. \tag{2}$$

$\frac{F}{D}$ kallas ibland $F$-talet eller nominellt fokalförhållande.

Vi definierar här

$$\textbf{Upplösningen} = \frac{1}{d} \approx \frac{1}{1.22} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{D}{F} \tag{3}$$

För grönt ljus ($\lambda$ = 0,5 µm) och ett $F$-tal $F/D = 1$ är det alltså meningsfullt att upplösa punkter ned till ungefär tätheten 0,5 µm. Sådan hög upplösning strävar man normalt efter endast i mikroskop.

För **skärpedjupet** $s$, gäller

$$s = \frac{2\epsilon a(a - F)}{DF} \tag{4}$$

där $a$ är avståndet mellan objekt och lins och $s$ är det interval som objektet kan förflyttas inom utan att suddas ut mer än $\varepsilon$.

En egenskap som inte direkt är kopplad till upplösningen gäller **totala antalet upplösbara bildpunkter** i bildfältet. De flesta linser och linssystem är utan vidare kapabla att upplösa 512x512 bildpunkter, vilket kommit att bli något av en standard för digitala bilder. I vissa sammanhang (högupplösande bildskanners) strävar man emellertid efter att upplösa 10 000-tals bildpunkter tvärs bildfältet. Härvid spelar själva linsens kvalitet och dess aperturdiameter $D$ en avgörande roll på så sätt att stor diameter $D$ krävs för att inte linsen ska behöva vara extremt vidvinklig. Fokalavståndet $F$ inverkar i princip inte på antalet upplösta bildpunkter.

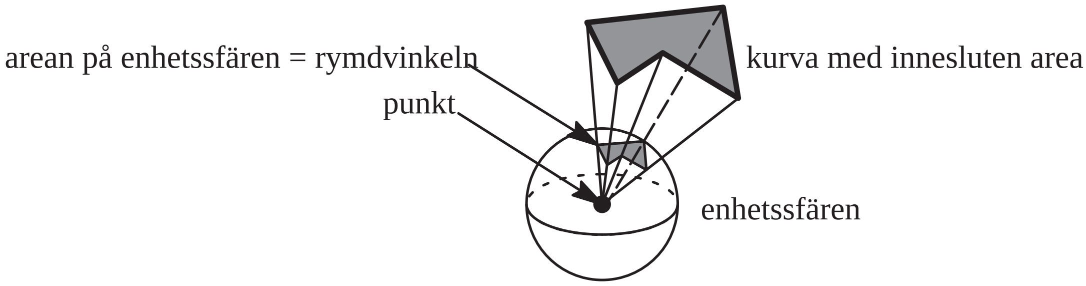


*Fig. 2 Illustration av rymdvinkeln.*

I det följande behövs begreppet rymdvinkel. En **rymdvinkel** är en del av rummet begränsad av linjesegment som utgår från en speciell punkt i rummet till alla punkter på en sluten kurva, se Fig. 2. Rymdvinkeln representerar den synliga vinkeln under vilken alla punkter innanför och på den slutna kurvan kan ses från den speciella punkten. Som mätvärde på rymdvikeln tas arean som skärs bort av linjesegmenten på en enhetssfär centrerad runt punkten. Den maximala rymdvinkeln, för en hel sfär, blir därmed

$$\text{rymdvinkeln} = \frac{A}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \tag{5}$$

där $A$ betecknar sfärens area och $r$ betecknar sfärens radie.

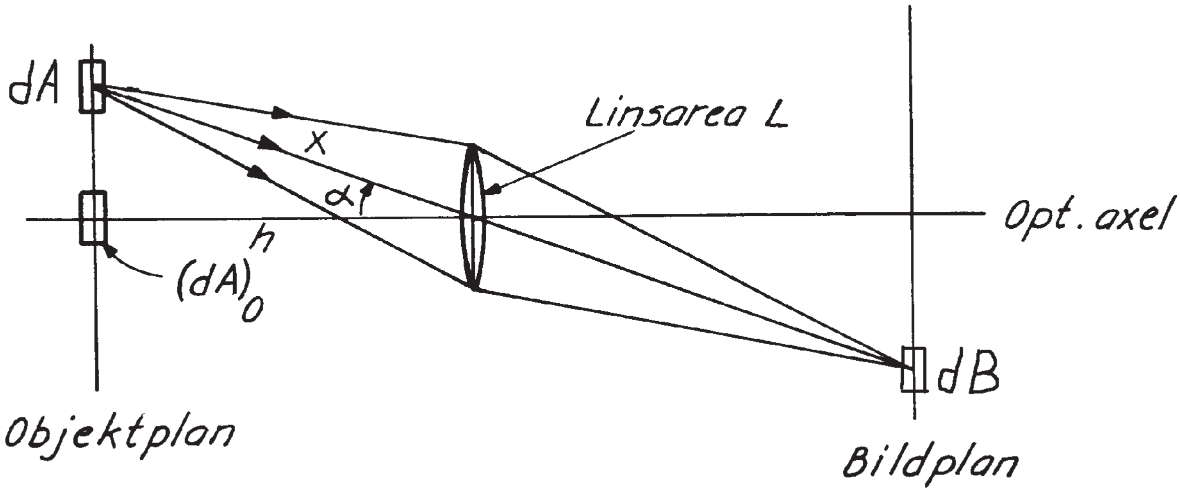


*Fig. 3 Geometri för beräkning av vinjettering.*

En vanlig lins ger **olika ljusstyrka** över bildytan - fokalplanet enligt den så kallade **cos$^4$-lagen**. Vi ska nu härleda denna lag, se Fig. 3 Det förekommer en hel del missuppfattningar om härledningen av cos$^4$-lagen i litteraturen. Det är följdaktligen lätt att tänka fel. Anta därför, för enkelhets skull, att objektplanet är en diffust reflekterande yta. En sådan reflekterar lika mycket ljus åt alla håll. Antag också att objektplanet ligger i fokus, dvs att det avbildas med perfekt skärpa på bildplanet. Ett ytelement $dA$ i objektplanet mappas genom linsen på ett ytelement $dB$ i bildplanet.

Ett ytelement $dA$ i objektplanet är placerad på avståndet

$$x = h / \cos\alpha \; . \tag{6}$$

Linsens apertur (apertur = ”glugg mot” eller “yta vänd mot”) mot ytelementet är

$$L \cdot \cos\alpha \,. \tag{7}$$

Ytelementet bestrålar därmed linsen med rymdvinkeln

$$\frac{L\cos\alpha}{x^2} = \frac{L\cos^3\alpha}{h^2}\,. \tag{8}$$

Vidare har ett ytelement i bildplanet med arean *dB*, ytan

$$dB \cdot \cos\alpha \tag{9}$$

vänd mot linsen. Avståndet mellan lins och bildelement påverkar inte ljusstyrkan, eftersom linsen bryter ihop ljuset mot bildplanet. Ekvation (8) kombinerat med (9) ger till slut att ljusstyrkan blir proportionell mot

$$\frac{L \cdot dB}{h^2} \cdot \cos^4\alpha. \tag{10}$$

Grafiskt illustreras cos$^4$-lagen av Fig. 4. En lins som används vidvinkligt får som synes stark dämpning, så kallad **vinjettering** i bildytans kantområden.

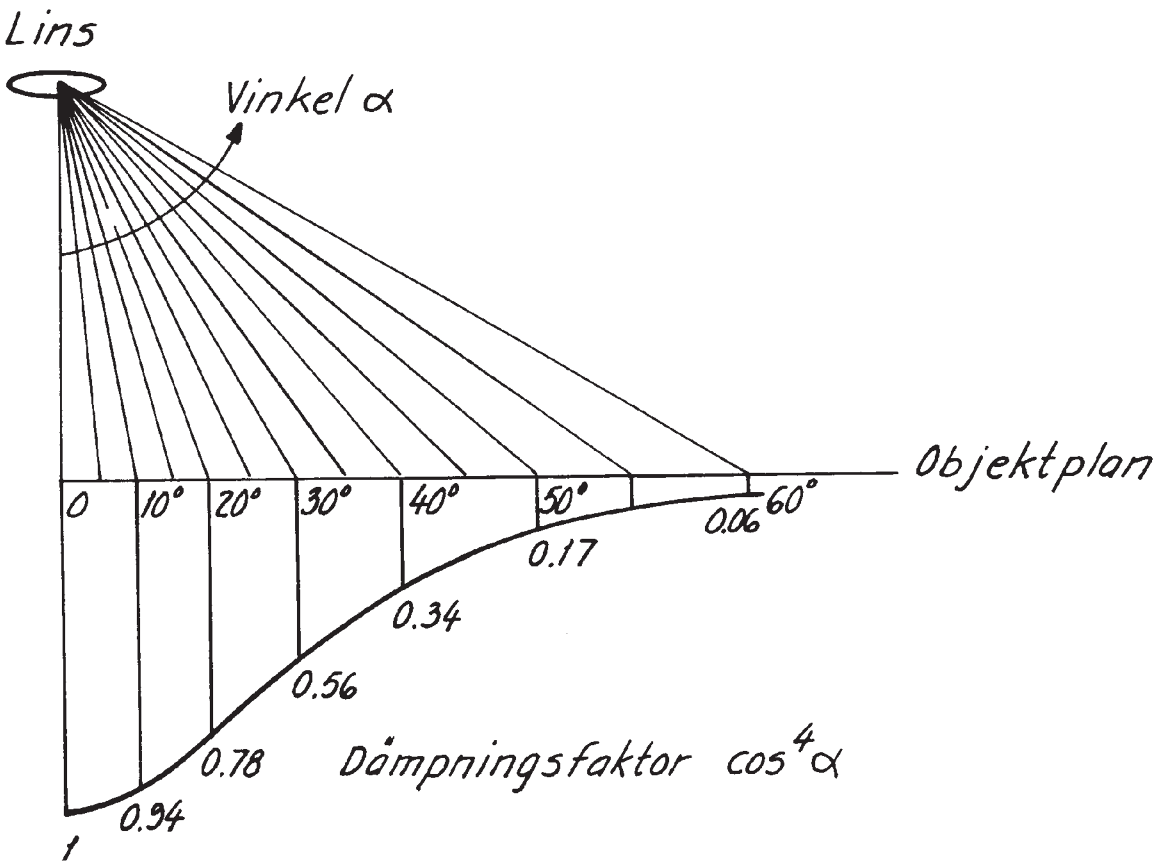


*Fig. 4 Vinjetteringseffekten hos en lins.*